SIT2D	DR : Résistance Des Matériaux	Le 18/11/18 Auteur : LL

Introduction

L'objectif de la RDM est d'assurer la tenue mécanique des systèmes techniques qui nous entourent.
Cette démarche s'inscrit complètement dans le cadre du développement durable puisque cela permet de :

- maximiser le service rendu
- minimiser l'impact sur l'environnement en minimisant les déchets
- minimiser les coûts de remplacement ou de réparation

Table des matières

Notions de base de la RDM

Notion de contraintes

Pour pouvoir comparer le chargement mécanique de deux pièces de dimension et de taille différentes, il faut utiliser la notion de contrainte.

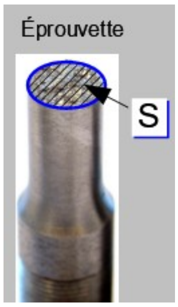
Dans le cas d'une éprouvette de traction, on a :

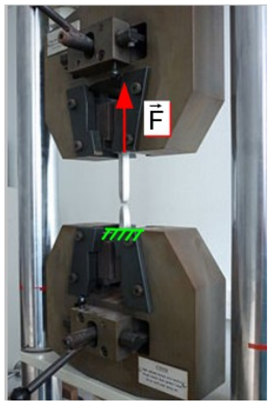
La contrainte en MPa

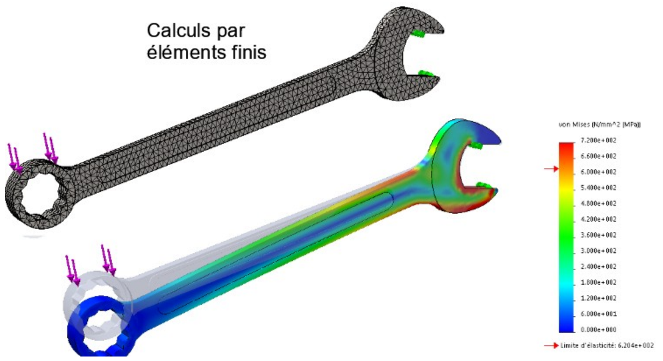
La force en N

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

L'aire de la section résistante en mm²

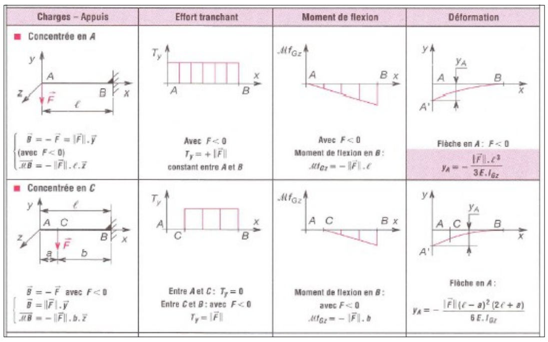






Pour les pièces de formes complexes, on peut utiliser les modèles de calculs par éléments finis pour déterminer les contraintes à n'importe quel endroit de la pièce.

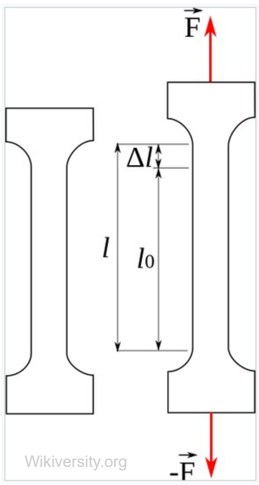
Pour les pièces de formes simples, on peut faire des calculs et utiliser des formulaires pour déterminer les contraintes maximum.



Charges – Appuis	Effort tranchant	Moment de flexion	Déformation
Concentrée en A $\vec{B} = -\vec{F} = \|\vec{F}\|.\vec{y}$ (avec $F<0$) $\overrightarrow{\mathcal{M}B} = -\|\vec{F}\|.\ell.\vec{z}$	Avec $F<0$ $T_y = +\|\vec{F}\|$ constant entre A et B	Avec $F<0$ Moment de flexion en B : $\mathcal{M}f_{Gz} = -\|\vec{F}\|.\ell$	Flèche en A : $F<0$ $y_A = -\frac{\|\vec{F}\|.\ell^3}{3E.I_{Gz}}$
Concentrée en C $\vec{B} = -\vec{F}$ avec $F<0$ $\vec{B} = \|\vec{F}\|.\vec{y}$ $\overrightarrow{\mathcal{M}B} = -\|\vec{F}\|.b.\vec{z}$	Entre A et C : $T_y = 0$ Entre C et B : avec $F<0$ $T_y = \|\vec{F}\|$	Moment de flexion en B : avec $F<0$ $\mathcal{M}f_{Gz} = -\|\vec{F}\|.b$	Flèche en A : $y_A = -\frac{\|\vec{F}\|(\ell-a)^2(2\ell+a)}{6E.I_{Gz}}$

Notion de déformation

De même pour pouvoir comparer l'allongement d'une éprouvette et ce qu'il peut se passer sur une pièce, on utilise la notion de déformation.



Dans le cas d'une éprouvette de traction, on a :

La déformation sans unité

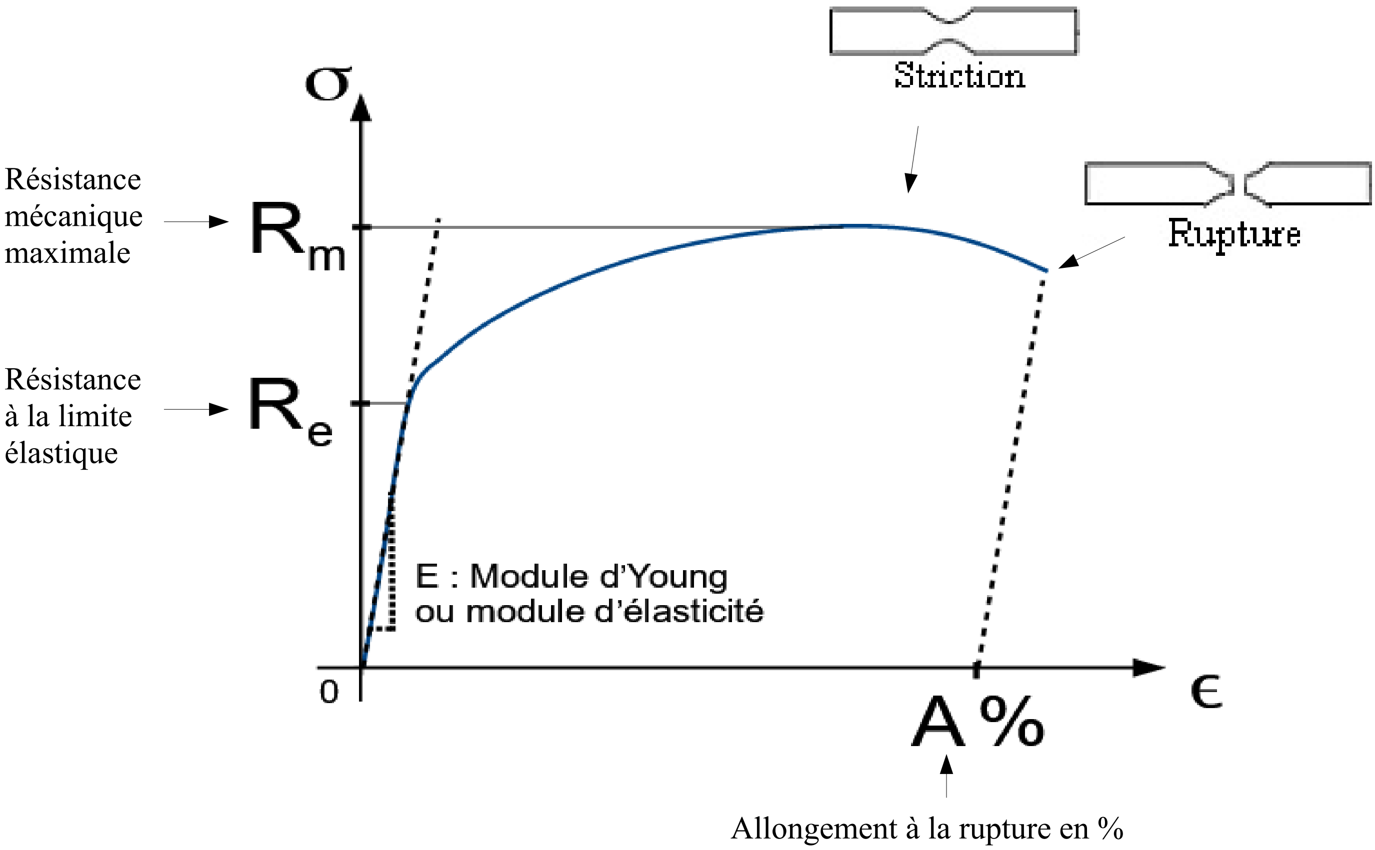
L'allongement en mm

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

La longueur initiale en mm

Comme les contraintes, les déformations peuvent être calculées sur des pièces soit en utilisant un modèle de calcul par éléments finis, soit par calcul, soit grâce à des formulaires

Essai de traction



Comportement mécanique des matériaux

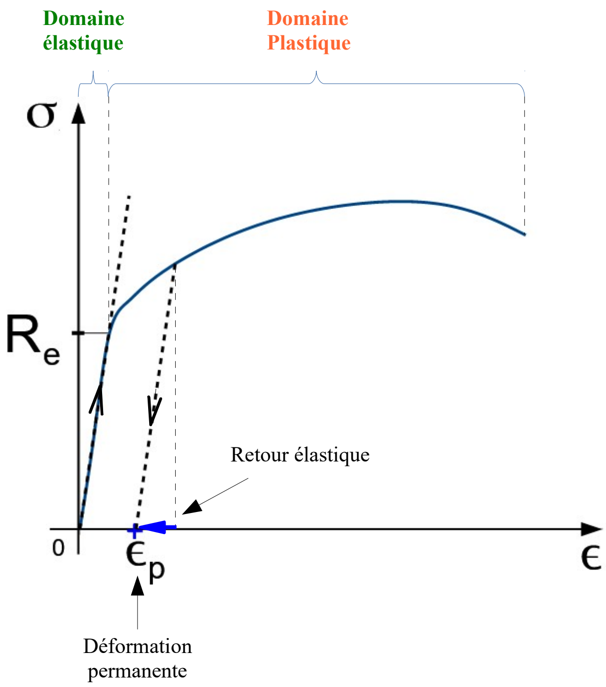
Tant que la contrainte est inférieure à Re, le comportement du matériau est élastique. C'est à dire qu'il retrouve sa forme initiale après déformation.

Dans le domaine élastique, les contraintes et les déformations sont proportionnelles. Cela est traduit par la loi de Hoocke :

Le module d'élasticité en MPa

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

La contrainte en MPa — La déformation sans unité



Quand un matériau est sollicité au-delà de sa limite élastique Re et qu'il est relâché ensuite, il suit le diagramme ci-contre.

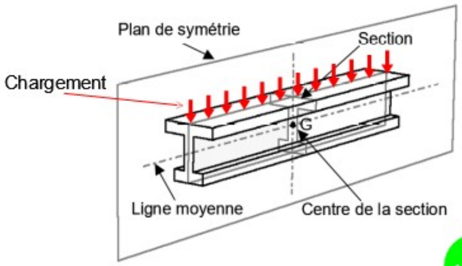
Il garde une déformation dite permanente après relâchement de la contrainte.
On dit alors qu'il a un comportement plastique.

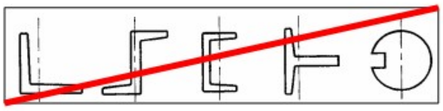
La part de déformation restituée après relâchement s'appelle le **retour élastique**.
La part de déformation restant après relâchement s'appelle la **déformation permanente**.

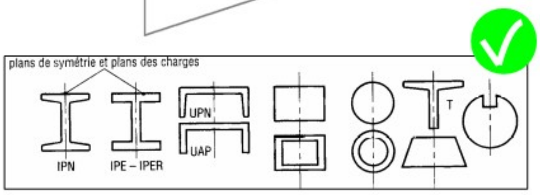
Calcul des poutres

Hypothèses « poutre »

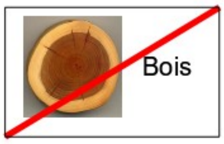
- Les pièces étudiées sont assimilables à des poutres :
  - Grande longueur
  - Droite
  - Section constante
  - Plan de symétrie dans la longueur

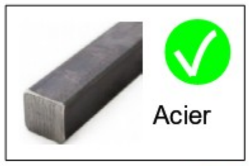




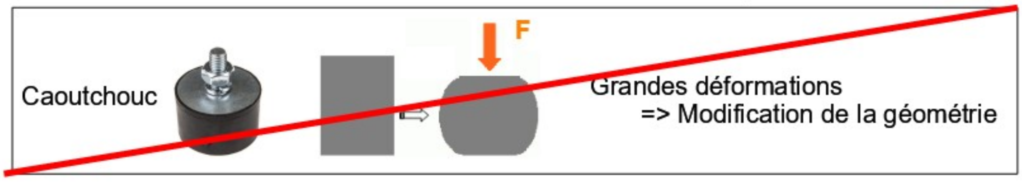


- Matériau homogène et isotrope



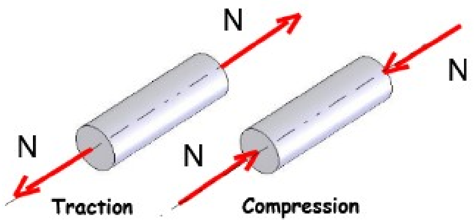


- Les déformations sont faibles

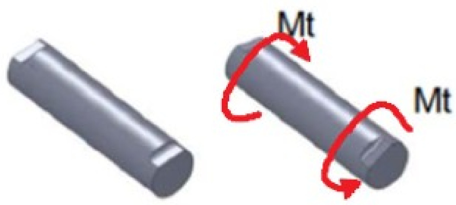


Sollicitations

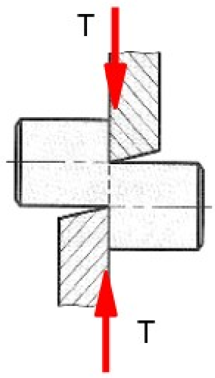
Traction ou compression =>Effort normal



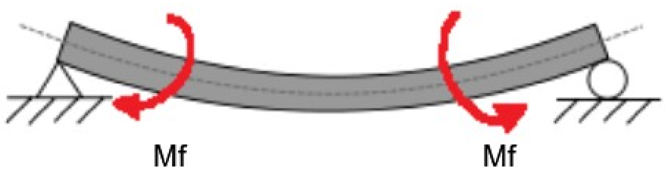
Torsion =>Moment de torsion



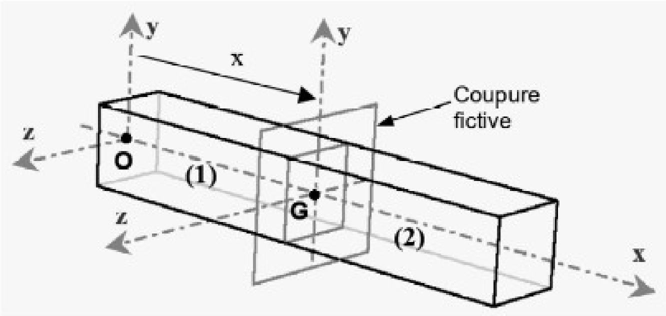
Cisaillement =>Effort Tranchant



Flexion =>Moment fléchissant



Torseur de cohésion

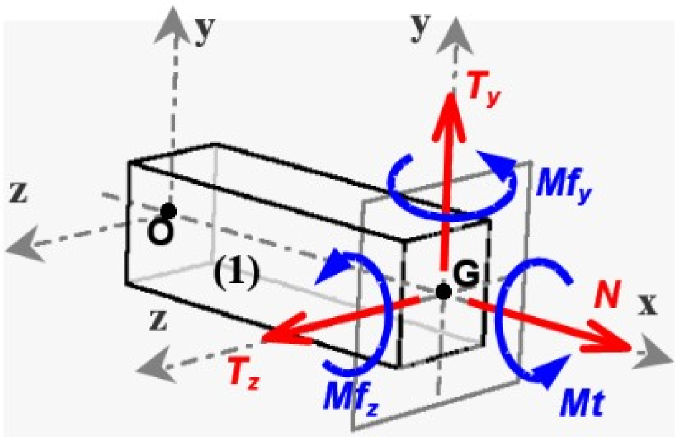


$$\{t_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(E2\to E1)} \\ \overrightarrow{M}_{G(E2\to E1)} \end{Bmatrix} = -{}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(E1\to E2)} \\ \overrightarrow{M}_{G(E1\to E2)} \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(x;y;z)}$$

N : Effort Normal sur $(G, \vec{x})$
T_y : Effort Tranchant sur $(G, \vec{y})$
T_z : Effort Tranchant sur $(G, \vec{z})$

M_t : Moment de Torsion sur $(G, \vec{x})$
M_{fy} : Moment de Flexion sur $(G, \vec{y})$
M_{fz} : Moment de Flexion sur $(G, \vec{z})$



Relations entre les sollicitations et le torseur de cohésion

En fonction de « l'allure » du torseur de cohésion, une typologie des **sollicitations** est établie.

On appelle **sollicitation simple** l'état de contrainte d'une poutre dont le torseur de cohésion ne comporte qu'un élément.

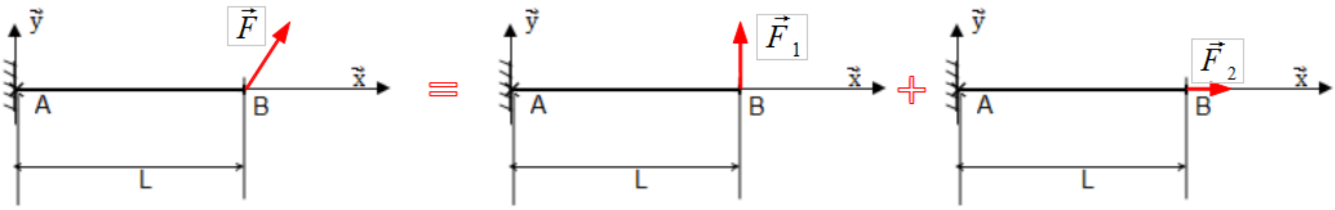
Nature des sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion	Torseur de cohésion
Traction (N>0) **Compression** (N<0)	N	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Cisaillement simple	N=0	T_y ou T_z	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$
Torsion simple	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	M_t	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Flexion pure	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	M_{fy} ou M_{fz}	$\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$

On appelle **Sollicitation composée** l'état de sollicitation d'une poutre soumise à **plusieurs sollicitations simples** (par exemple : Traction + flexion pure).

Principe de superposition

Pour calculer les conséquences en terme de contraintes ou de déformations de sollicitations composées, il suffit de calculer la conséquence de chaque sollicitation simple qui la compose et de les superposer en en faisant la somme pour obtenir les conséquences de la sollicitation composée.

Exemple : problème de flexion + (traction - compression)



On vérifie que : $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$

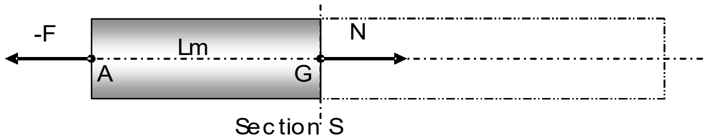
Le théorème de superposition donne donc : $\sigma(x)=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)$

Soit pour l'exemple : $\sigma(x)=(L-x).\dfrac{F_1 . y}{I_{GZ}}+\dfrac{F_2}{S}$

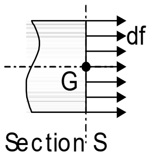
Cas particulier de la traction

Définitions

Quelle que soit la section considérée de la poutre, il s'exerce toujours N au barycentre G de la section. N est l'effort de cohésion normal à la section considérée.



Contrainte normale



Chaque élément de surface dS supporte un effort de traction df parallèle à la ligne moyenne. Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : contrainte normale en Mpa ou en N/mm²
N : effort normal en N
S : aire de la section droite en mm²

Condition de résistance

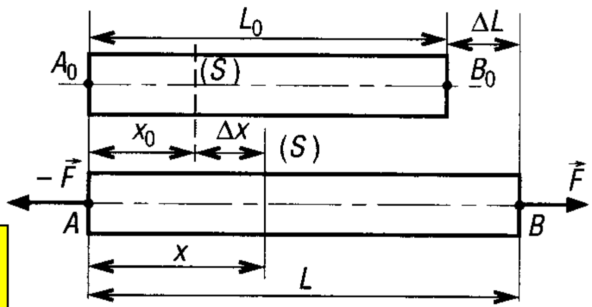
Soient : R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa)
s un coefficient de sécurité
R_{pe} la résistance pratique à l'extension, $R_{pe} = R_e/s$

La condition de résistance est :

$$\sigma_{maxi} \leq R_{pe}$$

Déformation

Soient : L_0 : longueur initiale de la poutre (en mm)
L : longueur de la poutre après déformation (en mm)
ΔL : Allongement de la poutre (en mm)
ε : Déformation



$\varepsilon = \Delta L / L_0$ ou $\Delta L = \varepsilon . L_0$

<u>Loi de Hooke :</u>
En déformation élastique, la contrainte σ varie linéairement en fonction de l'allongement relatif ε.

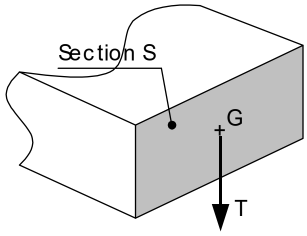
$$\sigma = E . \varepsilon$$

σ : contrainte normale en N/mm²
E : module d'Young ou module d'élasticité longitudinale en Mpa
ε : déformation

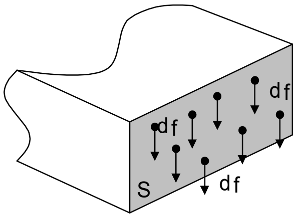
Cas particulier du cisaillement

Définitions

Une poutre est sollicitée en cisaillement lorsque sa section S est soumise à une résultante T appliquée en G (barycentre de la section) et contenue dans le plan (S).



Contrainte de cisaillement



Chaque élément de surface dS supporte un effort de cisaillement df contenu dans le plan (S).
Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D’où :

$$\boxed{T = \frac{T}{S}}$$

T : contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm²
T : effort tranchant en N
S : aire de la section droite cisaillée en mm²

Condition de résistance

Soient : R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa)

s un coefficient de sécurité

$T_{adm} = R_{pg}$ la résistance pratique au cisaillement, avec $\boxed{R_{pg} = R_{eg}/s}$

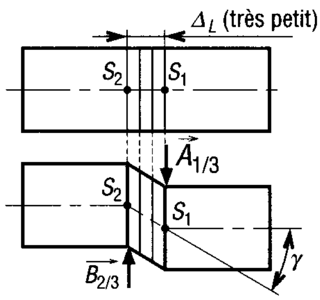
en première approximation on peut considérer que $\boxed{R_{eg} = R_e/2}$

Alors, la condition de résistance s’écrit :

$$\boxed{T \leq T_{adm}}$$

Déformation

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement T varie linéairement en fonction de l’angle de glissement γ.

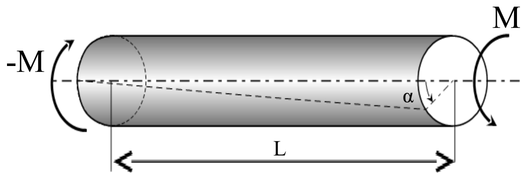


$$\boxed{T = G.\,\gamma}$$

T : contrainte tangentielle en N/mm²
G : module d’élasticité transversal en Mpa
γ : angle de glissement en radians

Remarque : $G = \dfrac{E}{2.(1+\nu)}$

Cas particulier de la torsion (hors programme)



Définitions

Une poutre est sollicitée en torsion lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments égaux et opposées, portées par la ligne moyenne Lm.

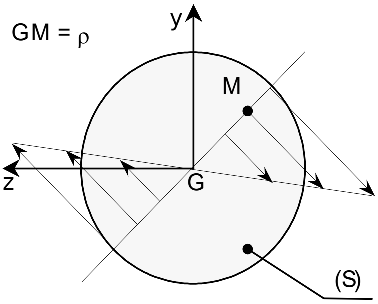
Le moment M est appelé *moment de torsion*, et est noté M_t. α est l'angle de rotation entre les deux extrémités de la poutre.

Contrainte tangentielle de torsion

Soit $\boxed{\theta = \dfrac{\alpha}{L} \text{ = angle } \textit{unitaire} \text{ de torsion.}}$

$$\boxed{T = G.\theta.\rho}$$

T : contrainte tangentielle en N/mm²
G : module d'élasticité transversal en Mpa
θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
ρ : rayon GM en mm



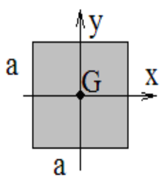
$$\boxed{M_t = G.\theta.I0}$$

M_t : Moment de torsion en N.mm
G : module d'élasticité transversal en Mpa
θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
I_0 : moment quadratique par rapport au point G en mm^4

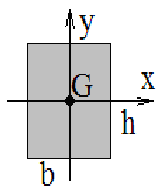
Remarque : $G = \dfrac{E}{2.(1+\nu)}$

d'où : $\boxed{T = \dfrac{M_t}{I_o}.\rho}$

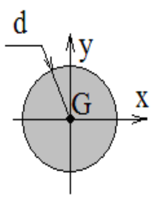
Moments quadratiques par rapport au centre de quelques formes usuelles :



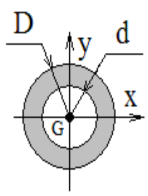
$I_G = \dfrac{a^4}{6}$



$I_G = \dfrac{bh\cdot(b^2+h^2)}{12}$



$I_G = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$



$I_G = \dfrac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$

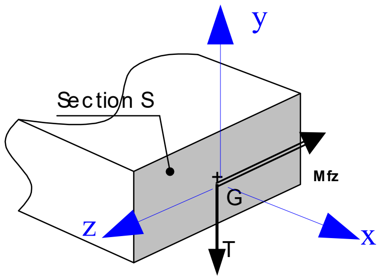
Condition de résistance

R_{eg} : la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa)
s : un coefficient de sécurité
R_{pg} : la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = R_{eg}/s$,
en première approximation on peut considérer que $R_{eg} = R_e/2$

$$\boxed{T_{max} \leq Rpg}$$

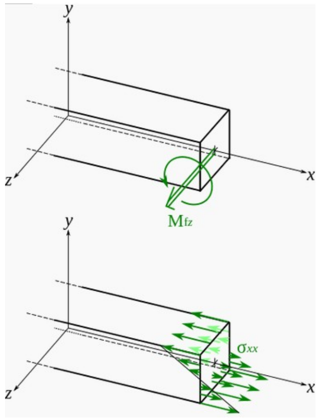
Cas particulier de la flexion

Définitions



Une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque sa section S est soumise à une action au barycentre composée d'une résultante T contenue dans le plan de symétrie et un moment Mfz perpendiculaire à ce dernier.
Mfz est appelé moment fléchissant, ou moment de flexion.
L'influence de l'effort tranchant T est en général négligeable par rapport à celle du moment fléchissant Mfz.

Contraintes normales



Comme le montre la figure ci-contre, la contrainte n'est pas homogène dans la section. Elle dépend de nottament y.

$$\boxed{\sigma=\frac{-M_{fz}}{I_{GZ}}.y}$$

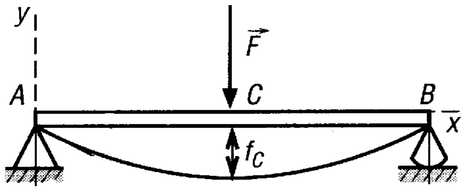
Avec :

M_{fz} : Moment de flexion en N.mm
Igz : moment quadratique de la section en mm4

Déformations

$$\boxed{M_{fz}=E.I_{GZ}.f''(x)}$$

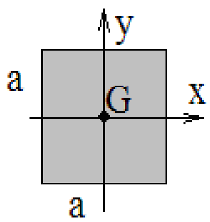
Mf_z : moment de flexion en N.m
E : module de Young en Pa
I_{Gz} : moment quadratique par rapport à l'axe z de la section en m^4 (voir ci_dessous)
$f(x)$: flèche (écart verticale par rapport à la position sans sollicitation) en m
$f''(x)$: dérivée seconde de la flèche par rapport à l'abscisse x



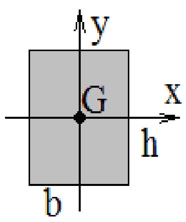
Pour obtenir l'expression de la flèche, on intègre 2 fois la formule précédente. Les constantes qui apparaissent lors des intégrations sont déterminées grâce aux conditions aux limites.

Remarque : Il existe de nombreux formulaires pour vous faciliter la tâche.

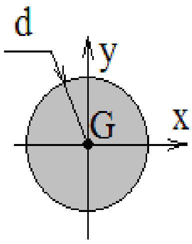
Moments quadratiques par rapport aux axes principaux de quelques formes usuelles :



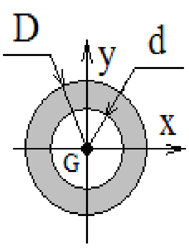
$$I_{Gx}=I_{Gy}=\frac{a^4}{12}$$



$$I_{Gx}=\frac{bh^3}{12} \quad I_{Gy}=\frac{hb^3}{12}$$



$$I_{Gx}=I_{Gy}=\frac{\pi\cdot d^4}{64}$$



$$I_{Gx}=I_{Gy}=\frac{\pi\cdot\left(D^4-d^4\right)}{64}$$

Condition de résistance

Soient : R_e la résistance élastique à l'extension du matériau (en Mpa) ;
s un coefficient de sécurité ;
R_{pe} la résistance pratique à l'extension, avec $R_{pe} = R_e/s$;

$$\boxed{\sigma_{max} \leq Rpe}$$

Concentration de contraintes

Lorsque une pièce présente de brusques variations de section (gorge, épaulement, trou,…), les formules de la résistance des matériaux ne sont plus applicables au voisinage du changement de section. La contrainte maximum y est supérieure à la contrainte uniforme calculée σ_o. On dit qu'il y a concentration de contraintes :

$$\sigma_{maxi}=\sigma_M=K_t.\sigma_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_0=\frac{F}{S}$$

K_t dépend de la forme et des dimension de la variation de section. On trouve sa valeur dans des abaques comme ci-dessous.