Traitement de l'information
Logique combinatoire

Le 08/10/11
Auteurs :
FC, JPK, LL,JCP

Sommaire

La logique combinatoire

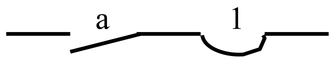
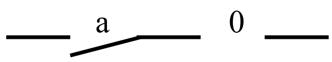
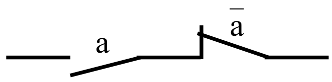
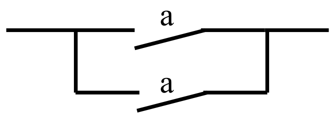
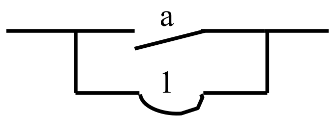
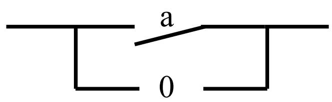
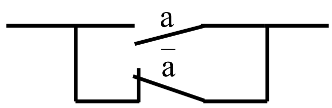
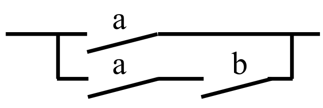
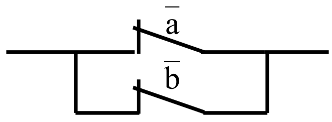
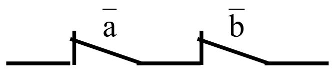
On appelle logique combinatoire tout fonctionnement dont l'état des sorties dépend de l'état des entrées indépendamment de la chronologie des événements. Pour une combinaison des variables d'entrées correspond un et un seul état des sorties.

La relation entre les entrées et les sorties peut être traduite par une table de vérité et/ou des équations.

Équations logiques

La combinaison des fonctions logiques de base permet de définir le fonctionnement combinatoire des systèmes.

Identités remarquables

$a . a = a$	
$a . 1 = a$	
$a . 0 = 0$	
$a . \bar{a} = 0$	
$a + a = a$	
$a + 1 = 1$	
$a + 0 = a$	
$a + \bar{a} = 1$	
$a + a . b = a$ Absorption	
$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a . b}$ Théorème de De Morgan	
$\bar{a} . \bar{b} = \overline{a + b}$ Théorème de De Morgan	

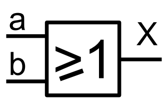
Les propriétés de l'algèbre de Boole

George Boole est le père fondateur de la logique moderne et son algèbre booléenne nous permet de résoudre les problèmes de logique combinatoire. Nous étudions ici les propriétés de cet algèbre de Boole

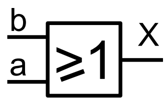
Commutativité

Somme logique

X = a + b = b + a

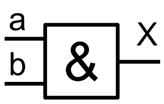


Équivalent à

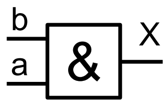


Produit logique

X = a . b = b . a



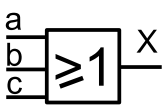
Équivalent à



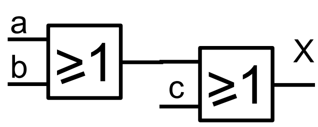
Associativité

Somme logique

X = a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)

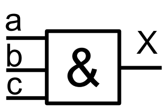


Équivalent à

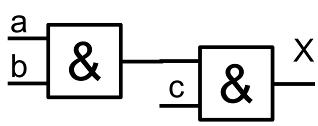


Produit logique

X = a . b . c = (a . b) . c = a . (b . c)



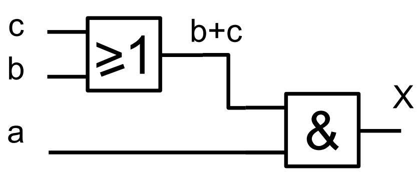
Équivalent à

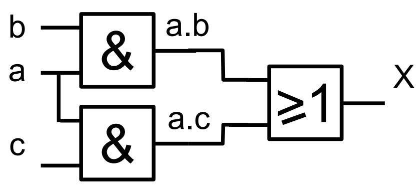


Distributivité

Somme logique

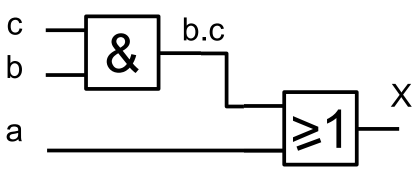
X = a . (b + c) = a . b + a . c
équivalent à



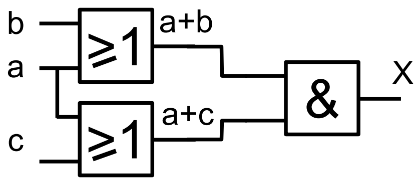


Produit logique

$$X = a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$$



équivalent à



Logigramme

Pour représenter de façon synthétique une équation nous pouvons utiliser le logigramme. L'utilisation du logigramme est une approche pour réaliser le câblage électronique utilisant des portes logiques.

Exemple d'équation

$$\mathbf{S = a \,.\, \bar{b} \,.\, c + \overline{a \,.\, b} + a \,.\, \bar{c}}$$

Dans l'équation nous identifions :

- 3 fonctions ET
- 1 fonctions NAND (Non Et)
- 2 fonctions NON
- 2 fonctions OU

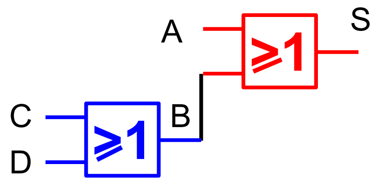
Le logigramme

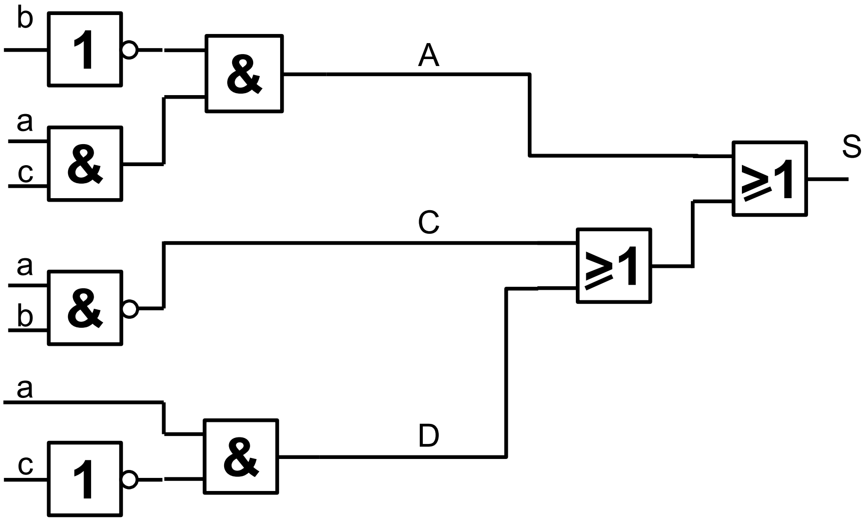
Une méthode pour construire le logigramme consiste à découper l'équation par les fonctions OU et commencer par la droite du logigramme.

$$\mathbf{S = \underbrace{a \,.\, \bar{b} \,.\, c}_{A} + \underbrace{\overline{a \,.\, b} + a \,.\, \bar{c}}_{B}}$$

$$\mathbf{A = a \,.\, \bar{b} \,.\, c}$$

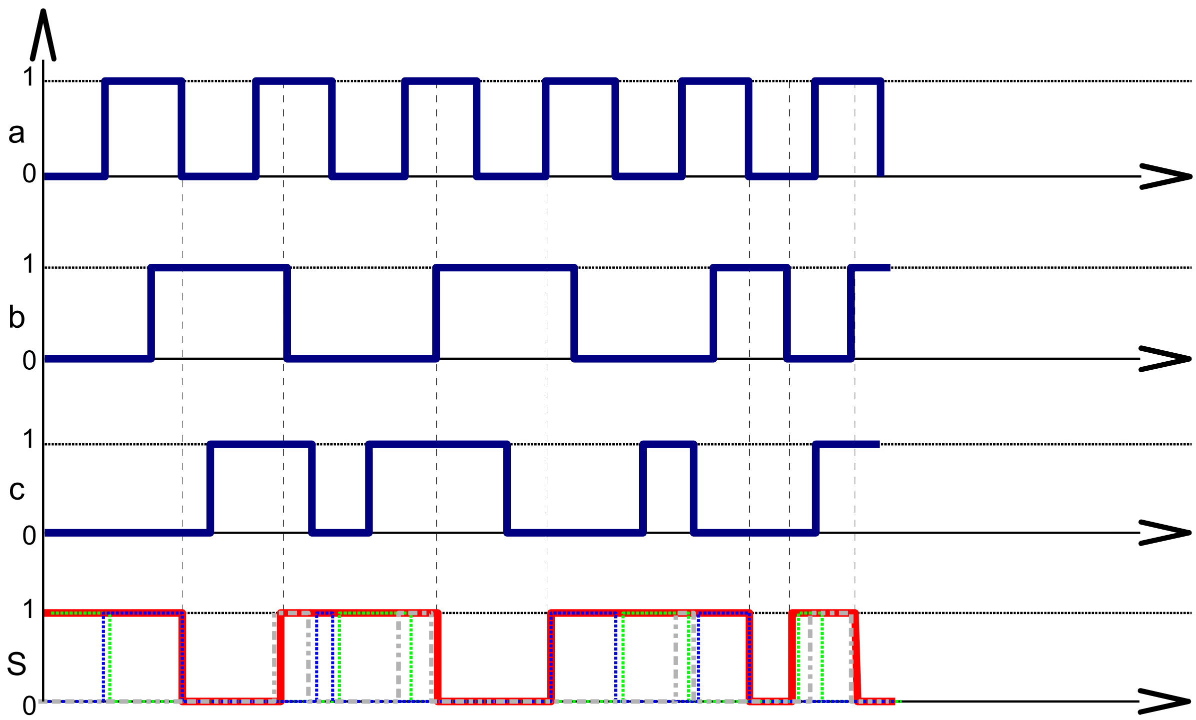
$$\mathbf{B = \underbrace{\overline{a \,.\, b}}_{C} + \underbrace{a \,.\, \bar{c}}_{D}}$$





Chronogramme

Pour représenter les solutions d'une équation logique nous pouvons représenter leur état en fonction du temps.



$$S = \underbrace{a . \overline{b} . c}_{\text{Gris}} + \underbrace{\overline{a . b}}_{\text{Vert}} + \underbrace{a . \overline{c}}_{\text{Bleu}}$$

En pointillé gris (A), vert (C) et bleu (D) les termes de l'équation générale.

Simplification des équations

Méthode algébrique

En utilisant les identités remarquables vues précédemment, nous pouvons simplifier l'écriture des équations logiques.

Exemple :

$$S = a \,.\, \bar{b} \,.\, c + \overline{a \,.\, b} + a \,.\, \bar{c} + b = a \,.\, \bar{b} \,.\, c + \bar{a} + \bar{b} + a \,.\, \bar{c} + b$$

On peux écrire que : $a \,.\, \bar{b} \,.\, c + \bar{b} = \bar{b}$ (absorption)

S devient donc : $S = \bar{a} + \bar{b} + a \,.\, \bar{c} + b$

On peux écrire que $\bar{b} + b = 0$

S devient maintenant : $S = \bar{a} + a \,.\, \bar{c}$

Méthode avec les rectangles de Karnaugh

Présentation

Un rectangle de Karnaugh est une représentation différente d'une table vérité (nombre de cases identique au nombre de ligne d'une table de vérité).

- Les cases sont uniques
- Chaque case correspond à une combinaison de toutes les variables d'entrées (une ligne de la table)
- Deux cases voisines ont une seule variable qui change
- Un rectangle de Karnaugh est fermé (la première ligne peut être répétée sous la dernière comme pour les colonnes).

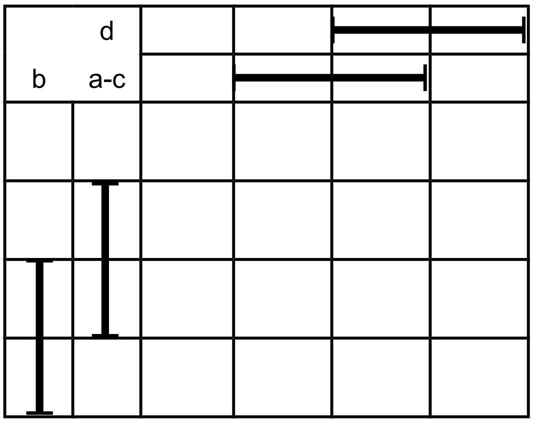
Exemple de rectangle : 4 variables ==> 2^4 cases

	d	d=0	d=0	d=1	d=1	
b	a - c	c=0	c=1	c=1	c=0	
b=0	a=0	0000 abcd	0010	0011	0001	0000
b=0	a=1	1000	1010	1011	1001	1000
b=1	a=1	1100	1110	1111	1101	1100
b=1	a=0	0100	0110	0111	0101	0100
		0000	0010	0011	0001	

Rectangle de 4 variables vide :

	d	0	0	1	1
b	a-c	0	1	1	0
0	0				
0	1				
1	1				
1	0				

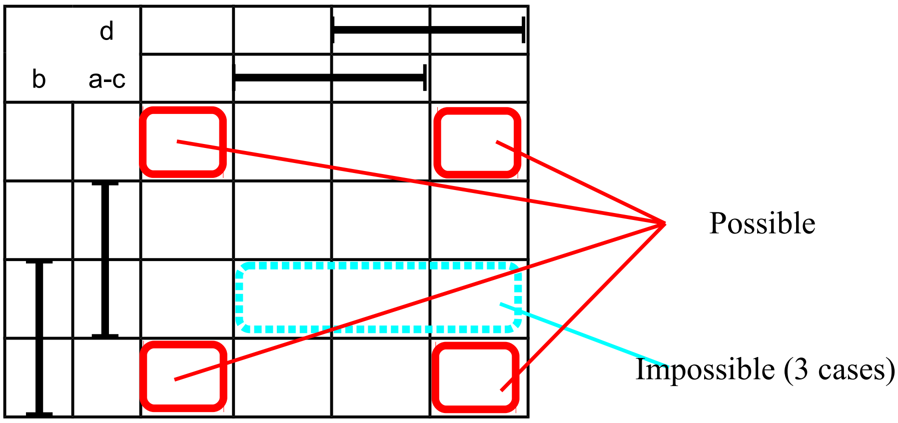
Pour simplifier la représentation il est possible de remplacer l'état 1 des variables par un trait.



Utilisation

L'utilisation d'un rectangle de Karnaugh consiste à regrouper les états 1 de la sortie suivant les règles suivantes :

- Établir des groupements les plus grand possible
- Les cases du groupement doivent avoir une variable en commun
- Le nombre de cases groupées doit être une puissance de 2 soit 1 case,2 cases, 4 cases, 8 cases...



Exemple

Équation :

$$S=a.(b+c.\overline{d})+b.(\overline{a}+c)+a.b+c.d+b.(\overline{c.d})$$

Table de vérité de la sortie S :

Développons S

$$S=a.b+a.c.\overline{d}+b.\overline{a}+b.c+a.b+c.d+b.\overline{c}+b.\overline{d}$$

Comme nous l'avons vu avec la fonction OU il suffit qu'un des termes soit vrai pour que S soit à1.

4 variables d'entrée (a,b,c,d) donc 2^4 combinaisons (lignes).

d	c	b	a	S	
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	2
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	1	4
0	1	0	0	0	5
0	1	0	1	1	6
0	1	1	0	1	7
0	1	1	1	1	8
1	0	0	0	0	9
1	0	0	1	0	10
1	0	1	0	1	11
1	0	1	1	1	12
1	1	0	0	1	13
1	1	0	1	1	14
1	1	1	0	1	15
1	1	1	1	1	16

On place les valeurs de S dans le rectangle.

	S	d					
	b	a-c					
			0	0	1	0	Ligne 14
Ligne 2			0	1	1	0	Ligne 10
			1	1	1	1	Ligne 16
			1	1	1	1	

On regroupe les 1.

S	d				
b	a-c				
		0	0	1	0
		0	1	1	0
		1	1	1	1
		1	1	1	1

Pour chaque groupement on liste les variables communes.

Groupement rouge → b

Groupement bleu → c.d

Groupement vert → a.c

L'équation de S est donc :

$$S = b + c\,.\,d + a\,.\,c = b + c\,.\,(a + d)$$

Exercice

Soit le rectangle de la sortie X :

X	d				
b	a-c				
		1	0	0	1
		0	0	0	0
		1	1	0	1
		1	1	1	1

Établir les groupements et en déduire l'équation.

X=